Filière PC

Durée : 3 heures

1) Soit x un nombre réel et n un entier naturel. Simplifier les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,\mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\,\mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\,\mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

(On n'oubliera pas de justifier avec soin les cas $n = 0$ et $n = 1$).

2) Soit Ω la matrice complexe $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et ω son polynôme caractéristique. Déterminer les racines de ω en posant $\mathrm{j} = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et en déduire un entier n tel que ω divise le polynôme $X(X^n + 27)$.

3) a) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Déterminer les réels x tels que $|\sin nx| \geqslant n\,|\sin x|$ (on pourra procéder par récurrence).

b) Si n est un entier arbitraire, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin^2 nx = n^2 \sin^2 x.$$

4) a) Résoudre l'équation $(1+\mathrm{i}z)^5 = (1-\mathrm{i}z)^5$ dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

b) En déduire les tangentes des nombres $\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$ que l'on mettra sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$ où n, p et q sont éléments de $\mathbb{Z}$, puis celle du nombre $\dfrac{\pi}{10}$.

5) a) Déterminer la fonction φ telle qu'une droite d'équation $y = mx + p$ n'est tangente à la courbe E d'équation $y = \mathrm{e}^x$ que si, et seulement si, $p = \varphi(m)$.

b) Déterminer la fonction ψ telle qu'une droite d'équation $y = mx + p$ n'est tangente à la courbe L d'équation $y = \ln x$ que si, et seulement si, $p = \psi(m)$.

c) Déterminer le nombre de tangentes communes aux courbes E et L. Que peut-on dire de leur pentes ? Ce résultat était-il prévisible ?

6) Soient deux cercles de rayons distincts R et r, respectivement centrés aux points de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ dans un repère orthonormé.

a) Montrer que les droites D coupant ces deux cercles suivant des cordes de même longueur sont tangentes à une parabole P dont on donnera l'équation.

b) Est-ce que réciproquement toutes les tangentes à P répondent à la question ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail